



1-задание оценивается в 7 баллов.

Докажите следующее неравенство, если для положительных действительных чисел a, b, c известно, что $a^2 \geq b^2 + bc + c^2$

$$a > \min(b, c) + \frac{|b^2 - c^2|}{a}$$

2-задание оценивается в 7 баллов.

Найдите все натуральные числа x, y , если $\frac{xy^2}{x+y}$ – простое число.

3-задание оценивается в 10 баллов.

AD – диаметр описанной окружности треугольника ABC . Точка H – основание высоты опущенной от точки A на BC . Точки M и N – концы перпендикуляров опущенных на AD от точек B и C соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника MHN лежит на BC .

4-задание оценивается в 10 баллов.

В четырёх коробках есть 2022 конфет. На каждом действии Сардору разрешается выбрать две любые коробки и взять по одной конфете из каждой из них. Затем, он кладёт эти конфеты на любую третью коробку (третья коробка отличается от двух выбранных). Докажите, что все конфеты можно собрать в одну коробку.

5-задание оценивается в 16 баллов.

Найдите все функции $f: R^+ \rightarrow R^+$, если известно, что для всех положительных действительных чисел x, y, z верно:

$$f(xf(z) + yz) = yf(z) + f(x)f(z)$$

(R^+ -множество положительных действительных чисел)

